

Mathématique et musique I

Introduction

Les instruments à cordes pincées ont presque tous les caractéristiques suivantes:

- Les cordes vibrent au-dessus d'une caisse de résonance, afin d'augmenter le volume;
- Elles sont montées au-dessus d'un manche, permettant ainsi de modifier la longueur de la partie vibrante;
- On peut modifier la tension dans la corde à l'aide de chevilles autour desquelles elles sont enroulées;
- Les cordes sont faites de différents matériaux, et de diamètres différents.

Tels sont la guitare, le luth, la mandoline, etc.

On peut représenter les caractéristiques de tels instruments à cordes avec le schéma suivant.

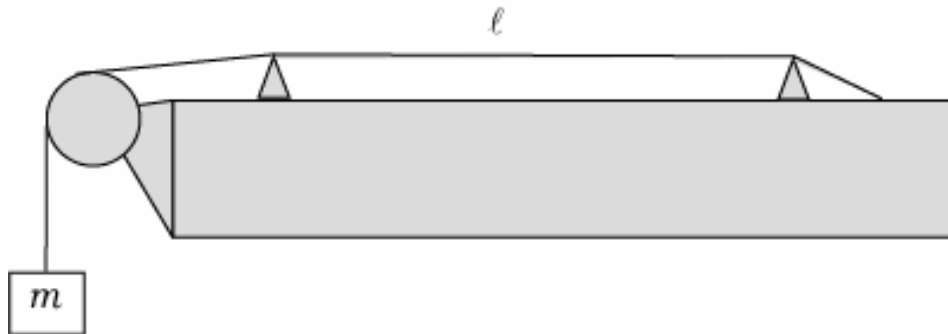


figure 1

Quels sont les paramètres que l'on peut faire varier, afin d'obtenir différentes notes?

- La tension dans la corde, T ; plus celle-ci augmente, plus la note est aigüe;
- La longueur de la partie de la corde qui peut vibrer, l ; plus elle est petite, plus la note est aigüe;
- La grosseur de la corde ainsi que son matériau ont une influence sur la hauteur de la note; plus le diamètre de la corde est petit, plus la note est aigüe, tandis que dans les cordes basses, celles-ci sont entourées d'un fil de métal. En fait, ce qui intervient ici c'est la densité de la corde, c'est-à-dire, sa masse par unité de longueur, par exemple, 1 gr par centimètre. Nous noterons cette variable par la lettre ρ .

On comprend aisément que si l'on fait varier un de ces trois paramètres, les notes obtenues seront différentes. Mais quel lien existe-t-il entre la fréquence de la note, que nous noterons f , et l'ensemble de ces facteurs?

Pythagore fut l'un des premiers à étudier cette question. L'étude de la musique était pour lui aussi importante que celle des mathématiques et de la philosophie. La vie et l'œuvre de ce philosophe et mathématicien grec du VI^e siècle avant J-C ne sont pas très bien connues. Il serait né à Samos mais aurait vécu à Crotona, en Italie, après avoir beaucoup voyagé. Une pièce de monnaie de Samos, sous le règne de Trajan, à l'effigie de Pythagore montre à quel point il était admiré. Il y fonde une secte religieuse, philosophique et scientifique, préconisant un genre de vie ascétique. Ses adeptes et lui, vivent en communauté et pratiquent des rites secrets. Ils mettent en commun tous leurs biens ainsi que toutes leurs découvertes scientifiques, de telle sorte que les travaux attribués à Pythagore sont en fait le résultat des recherches de toute sa secte.

Sa philosophie voit dans le principe des contraires, limité-illimité, impair-pair, droite-courbe, etc. l'origine de toute chose. Une de ses devises était: « *Toutes choses sont des nombres* ».

Pour les pythagoriciens, qui sont de grands mystiques, tout l'Univers peut être représenté à l'aide de la théorie des nombres, qui ne comprenaient, pour eux, que les entiers positifs naturels:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

et les fractions qu'on peut former à l'aide de ces entiers:

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\}$$

Une légende dit qu'un des disciples de Pythagore, à l'esprit plus critique, trouva qu'il était possible de construire géométriquement des nombres qui sont autres que ceux décrits plus haut, ce qui remettait en question toute la théorie pythagoricienne. Et, pour le démontrer, il utilisait le théorème même de Pythagore. Il lui arriva ce qui arrive toujours en ces circonstances: l'histoire dit qu'il fut expulsé de la secte.

Pythagore croyait que Dieu avait ordonné l'Univers par les nombres. L'harmonie musicale était pour lui divine. Elle consistait en rapports numériques et quiconque acquérait la compréhension de l'harmonie devenait lui-même divin et immortel. C'est pourquoi l'école Pythagoricienne attachait tellement d'importance à l'étude de la musique.

L'essentiel de leurs études portait sur la théorie des nombres, mais étaient aussi étudiées la géométrie, l'astronomie, la philosophie et la musique.



figure 2

Pythagore s'attacha surtout à démontrer le lien qui existe entre la longueur de la corde et la hauteur du son obtenu. La notion de fréquence n'existait pas à ce moment-là mais ils percevaient la notion de hauteur : un son est plus aigu ou plus bas qu'un autre. Si l'on divise la longueur de la corde en deux, ils constataient que le son obtenu était à l'octave du son initial; nous dirions que le son a une fréquence deux fois plus élevée.

Sur une guitare par exemple, la XIIe frette est exactement située à la mi-longueur de la corde. Le mi obtenu à la XIIe case sur la première corde est à l'octave du mi à vide.

Si on divise la longueur de la corde par trois, approximativement à la VIIe case, on obtient une fréquence trois fois plus élevée, etc.

D'après ses expériences sur les cordes vibrantes, Pythagore déduisit que la fréquence du son émis est inversement proportionnelle à la longueur de la corde: plus celle-ci est petite, plus la fréquence est élevée; inversement, plus elle est grande, plus la note est basse, c'est-à-dire, la fréquence petite.

$$f \propto \frac{1}{\ell}$$

Une corde dont la longueur est exactement la moitié d'une autre émettra un son de fréquence deux fois plus élevée. Ce principe est utilisé dans les clavecins, chaque corde est doublée par une corde deux fois plus courte, de telle sorte que chaque touche actionne deux sautereaux: un sur la grande corde et un sur la petite. Chaque note est ainsi accompagnée de son octave, ce qui donne un son brillant et cristallin, typique du clavecin.

Qu'advient-il des deux autres facteurs, la tension dans la corde ainsi que sa densité?

Les luthiers, ainsi que les musiciens, étaient parfaitement conscients des rapports existant entre ces différents paramètres, mais il fallut attendre plusieurs centaines d'années, après Pythagore, avant qu'un autre mathématicien s'intéresse à la question.



figure 3

L'abbé Marin Mersenne (1588 - 1648), savant et philosophe français, fut l'un des premiers à utiliser un laboratoire et à y expérimenter les cordes vibrantes. Partisan d'un travail collectif, il consacra sa vie à la science et favorisa les échanges avec tous les savants de son temps: Descartes, Pascal, Fermat, Torricelli, etc.

Il publia les *Mécaniques de Galilée*, les *Nouvelles pensées de Galilée*, puis cinq ouvrages récréatifs sur la science, dont entre autres, son *Harmonie musicale*, dans laquelle il énonce la formule des cordes vibrantes.

En 1635 il organisa l'*Academia Parisiensis*. Il fut l'un des pionniers de la physique quantitative. Il étudia divers problèmes de physique, dont le télescope à miroir parabolique, mais il est surtout connu pour ses études en acoustique. Il découvrit la loi des tuyaux sonores et des cordes vibrantes, observa l'existence des harmoniques supérieurs, sans toutefois en découvrir la cause. De plus, il détermina la relation entre les fréquences et les notes de la gamme. Enfin, il étudia le phénomène de l'écho, ce qui lui permit de mesurer la vitesse du son dans l'air. Tout un bonhomme cet abbé!

Il fut le premier à découvrir la relation qui existe entre la fréquence et la tension dans la corde ainsi qu'avec la densité de celle-ci. En faisant des expériences en laboratoire, il démontra que la fréquence est directement proportionnelle à la racine carrée de la tension :

$$f \propto \sqrt{T} .$$

Plus on augmente la tension dans la corde, plus la fréquence augmente, mais elle n'augmente pas aussi vite que la tension. Il faut une tension quatre fois plus grande pour obtenir l'octave. Si seule la tension dans les cordes variait, les instruments de musique subiraient des tensions colossales. Afin de remédier

à ce problème, les luthiers imaginèrent d'employer des cordes de grosseurs différentes. La chanterelle d'un violon, la première corde, est beaucoup plus petite que les autres, les cordes graves sont souvent entourées d'un fil de métal, etc. Il en est de même sur presque tous les instruments à cordes.

En ne faisant varier que le diamètre on peut se permettre de garder la tension constante d'une corde à l'autre, sinon les instruments de musique auraient à supporter des différences de tension majeures. Ceux-ci sont en général très sensibles aux différences de température et d'humidité, ils se déformeraient donc très rapidement s'ils avaient à subir des tensions excessives. Par exemple, la plupart des tables d'harmonie de clavecin sont passablement bombées; ce qui s'explique assez bien quand on sait qu'elles ont une épaisseur de quelques millimètres.

Afin d'augmenter encore plus les différences d'une corde à l'autre, on entoure les cordes basses d'un fil de métal, augmentant ainsi leur poids.

Si ρ représente la masse par unité de longueur (la densité linéique, comme disent les physiciens), la loi de Mersenne nous dit que la fréquence de la note est inversement proportionnelle à la racine carrée de la densité:

$$f \propto \frac{1}{\sqrt{\rho}} .$$

Plus la corde est grosse, plus le son est bas, et vice versa.

En tenant compte de ces trois facteurs, on en arrive à la formule de Mersenne:

$$f = \frac{1}{2\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho}} .$$

Il fallut attendre le XVIII^e siècle avant d'en avoir une démonstration définitive. En utilisant le calcul différentiel, de grands mathématiciens tel Euler, d'Alembert, Bernoulli et Lagrange démontrèrent la formule des cordes vibrantes.

En pratique, cette formule va servir aux fabricants d'instruments à cordes, comme le clavecin, la guitare, le violon, afin de déterminer le diamètre des cordes à utiliser ainsi que leur longueur. Le but est d'avoir une tension assez semblable sur toute l'étendue de l'instrument afin que celui-ci soit bien équilibré.

À titre d'exemple, la tension dans les cordes d'un luth est environ de 4 kg; s'il y a 14 cordes, comme dans le cas du théorbe, la tension totale exercée sur le pont sera de 56 kg (presque le poids d'une personne!).

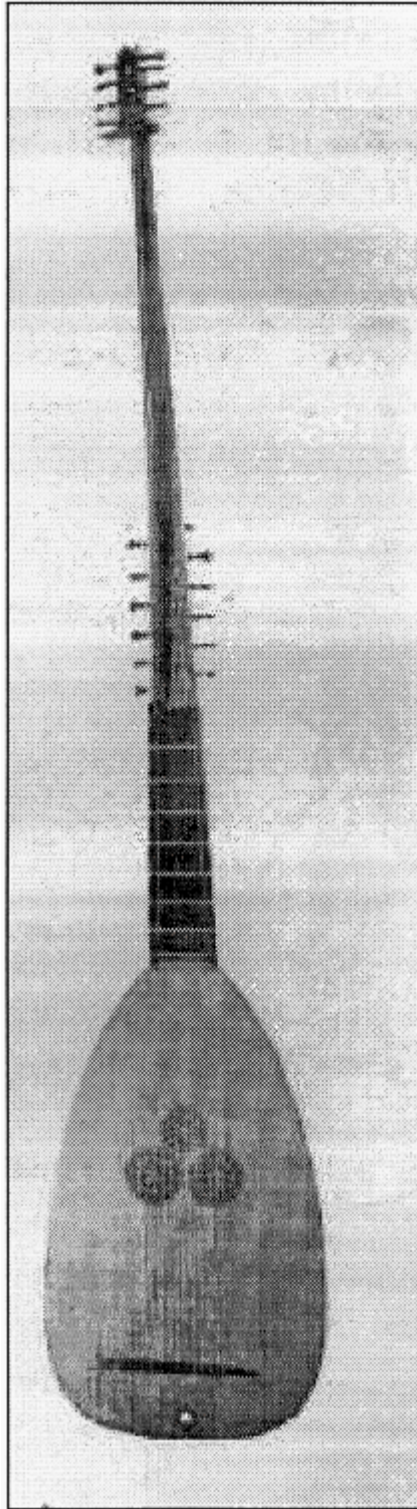


figure 4

Démonstration de la formule des cordes vibrantes

Examinons le mouvement d'une corde flexible, de longueur ℓ , fixée à ses extrémités, qu'on soumet à une légère modification, soit par pincement comme dans les instruments à cordes pincées, soit par un coup comme dans les instruments à cordes frappées, ou soit par frottement, comme dans les instruments à cordes frottées.



figure 5

On ne considère que de légères transformations de la corde, sinon le son émis sera plutôt un bruit, et à la limite la corde pourrait se rompre. On suppose que la tension dans la corde est tangentielle et que son intensité est constante. On négligera le poids de la corde par rapport à la tension dans celle-ci. De plus, on supposera que le mouvement des points de la corde s'effectue perpendiculairement à la position initiale. Dans le cas d'instruments à cordes frottées, comme le violon, un certain mouvement dans le sens de la corde peut être engendré par un angle de frottement non perpendiculaire à celle-ci.

Soit $y(x,t)$ la fonction donnant la hauteur d'un point de la corde en fonction de l'abscisse x et du temps t .

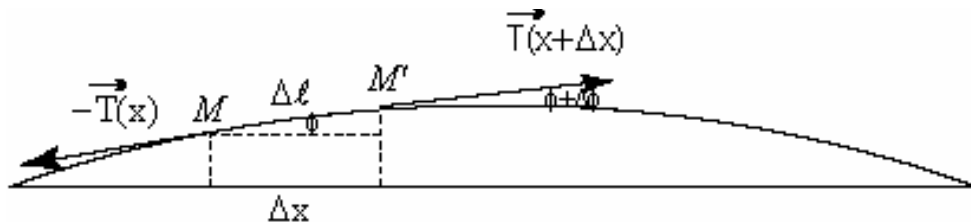


figure 6

Les conditions initiales du problème sont les suivantes:

1. $y(0,t) \equiv 0$ et $y(\ell,t) \equiv 0$; les extrémités de la corde sont fixes.
2. $y(x,0)$ correspond à la forme initiale de la corde, c'est une fonction de x : $y(x,0) = \varphi(x)$.
3. On peut imprimer une vitesse initiale aux points de la corde: $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = \psi(x)$.

Considérons un élément de corde MM' , de longueur $\Delta\ell$, correspondant à une tranche de largeur Δx . On décompose les tensions aux extrémités de l'élément de corde de la façon suivante:

$$\vec{T}(x) = T \cos \phi \cdot \vec{i} + T \sin \phi \cdot \vec{j}$$

$$\vec{T}(x + \Delta x) = T \cos(\phi + \Delta\phi) \cdot \vec{i} + T \sin(\phi + \Delta\phi) \cdot \vec{j}$$

On suppose qu'il n'y a pas de mouvement horizontal dans la corde, donc que celle-ci est pincée, frappée ou frottée perpendiculairement. (On peut créer un tel mouvement en frottant la corde avec un archet non perpendiculairement; il y aura alors une onde longitudinale dans la corde qui se superposera au mouvement vertical.)

On utilise la seconde loi de Newton; l'accélération horizontale est nulle et l'accélération verticale sera donnée par :

$$T \sin(\phi + \Delta\phi) - T \sin \phi = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t).$$

Si on ne considère que de légères transformations de la corde, l'angle ϕ est très petit, donc

$$\sin \phi \approx \tan \phi = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t).$$

Ainsi,

$$T \cdot \left[\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \right] = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t)$$

Par le théorème de la moyenne, il existe un point ξ compris entre x et $x + \Delta x$ pour lequel

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\xi, t) \cdot \Delta x$$

d'où,

$$T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(\xi, t) \cdot \Delta x = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t).$$

Si la largeur de la tranche est suffisamment petite, le point ξ peut être remplacé par x :

$$\Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x, t) \approx T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \cdot \Delta x.$$

Soit ρ la densité de la corde (masse par unité de longueur). Comme la largeur de la tranche est très petite, on peut approximer $\Delta\ell$ par Δx , d'où, $\Delta m = \rho \cdot \Delta\ell \approx \rho \cdot \Delta x$ et

$$\rho \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \approx T \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{T}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$$

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t).$$

C'est l'équation des cordes vibrantes; c'est une équation qui vaut aussi pour d'autres phénomènes ondulatoires.

La méthode que nous allons utiliser pour résoudre cette équation différentielle consiste à chercher une solution $y(x,t)$ à variables séparées, c'est-à-dire de la forme $y(x,t) = f(x) \cdot g(t)$, où $f(x)$ et $g(t)$ sont des fonctions à une seule variable. On aura alors

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x) \cdot g(t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = f(x) \cdot g'(t).$$

L'équation des cordes vibrantes devient alors

$$f(x) \cdot g''(t) = v^2 \cdot f''(x) \cdot g(t)$$

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Pour que cette égalité ait lieu pour toute valeur de x et de t , il faut absolument qu'elles soient égales à une constante k :

$$\frac{1}{v^2} \cdot \frac{g''(t)}{g(t)} = \frac{f''(x)}{f(x)} = k$$

ce qui nous donne deux équations différentielles d'ordre deux linéaires homogènes :

$$f''(x) = k \cdot f(x)$$

$$(2) \quad f''(x) - k \cdot f(x) = 0$$

et

$$g''(t) = v^2 k \cdot g(t)$$

$$(3) \quad g''(t) - v^2 k \cdot g(t) = 0.$$

Nous allons examiner en premier lieu le cas où la constante k est positive.

Le polynôme caractéristique de l'équation (2) est $p(x) = \lambda^2 - k$, qui admet deux zéros distincts¹ :

$$m_1 = \sqrt{k} \text{ et } m_2 = -\sqrt{k}.$$

La solution est alors

$$f(x) = K_1 e^{m_1 x} + K_2 e^{m_2 x}.$$

Une telle solution est impossible puisqu'il faut que $f(0) = 0$ et que $f(\ell) = 0$:

$$f(0) = 0 \Rightarrow K_1 + K_2 = 0 \Rightarrow K_2 = -K_1$$

$$f(x) = K_1 e^{\sqrt{k} \cdot x} - K_1 e^{-\sqrt{k} \cdot x}$$

$$f(\ell) = K_1 e^{\sqrt{k} \cdot \ell} - K_1 e^{-\sqrt{k} \cdot \ell} = 0$$

$$K_1 \cdot \left(e^{\sqrt{k} \cdot \ell} - \frac{1}{e^{\sqrt{k} \cdot \ell}} \right) = 0$$

$$K_1 \cdot \frac{e^{2\sqrt{k} \cdot \ell} - 1}{e^{\sqrt{k} \cdot \ell}} = 0$$

$$K_1 = 0 \text{ ou } e^{2\sqrt{k} \cdot \ell} = 1$$

ce qui est impossible. On en conclut que la constante k est négative. L'équation (3) peut donc s'écrire

$$g''(t) + v^2 k \cdot g(t) = 0$$

avec une constante positive k .

C'est aussi une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux, c'est-à-dire de la forme $ay'' + by' + cy = 0$; le discriminant de son polynôme caractéristique est négatif :

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4v^2 k < 0.$$

La solution générale de cette équation est alors donnée sous la forme suivante:

$$g(t) = K_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + K_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

où

¹ On peut consulter la référence [4], page 311, pour plus de détails sur la façon de résoudre ce type d'équations.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = 0 \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = v\sqrt{k}.$$

Ce qui nous donne :

$$g(t) = K_1 \cos(v\sqrt{k} \cdot t) + K_2 \sin(v\sqrt{k} \cdot t)$$

On résout l'équation (2) de la même façon :

$$f''(x) + k \cdot f(x) = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -4k < 0$$

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = 0 \text{ et } \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \sqrt{k}.$$

$$f(x) = K_3 \cos(\sqrt{k} \cdot x) + K_4 \sin(\sqrt{k} \cdot x).$$

Les conditions initiales du problème nous donnent des informations sur les constantes K_i :

$$f(0) = 0 \Rightarrow K_3 = 0,$$

la forme initiale de la corde ne peut pas comprendre de cosinus, ses extrémités sont fixées sur l'axe horizontal.

$$f(\ell) = 0 \Rightarrow K_4 \sin(\sqrt{k} \cdot \ell) = 0$$

$$\sqrt{k} \cdot \ell = n \cdot \pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$

$$\sqrt{k} = \frac{n \cdot \pi}{\ell}.$$

Ainsi,

$$f(x) = K_4 \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right).$$

On remplace ensuite la valeur de la constante k dans la solution de $g(t)$:

$$g(t) = K_1 \cos\left(v \frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot t\right) + K_2 \sin\left(v \frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot t\right).$$

Une telle solution peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$g(t) = A \sin\left(v \frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot t + \varphi\right).$$

Nous obtenons alors la solution globale :

$$y(x, t) = K_4 \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right) \cdot A \sin\left(v \frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot t + \varphi\right).$$

Pour chaque valeur entière positive de n , cette fonction est une solution possible à l'équation des ondes avec les conditions initiales du problème. Il faudrait donc écrire :

$$(4) \quad y_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right) \cdot \sin\left(v \frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot t + \varphi_n\right).$$

À chaque point x de la corde, la période de cette fonction est obtenue lorsque $v \cdot \frac{n \cdot \pi}{\ell} \cdot t = 2\pi$, donc

$$t = \frac{2\ell}{n \cdot v}.$$

La fréquence de cette solution est donc :

$$f = \frac{n \cdot v}{2\ell}$$

et la valeur de la constante v était $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$; d'où

$$f_n = n \cdot \frac{1}{2\ell} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

On en conclut que plusieurs fréquences sont possibles, qui sont toutes des multiples entiers de la fréquence de base, dite fondamentale :

$$f = \frac{1}{2\ell} \cdot \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

ce qui démontre la loi de Mersenne pour les cordes vibrantes.

Le timbre d'un instrument

Les fréquences qui sont des multiples de la fréquence fondamentale sont dites les harmoniques; elles sont présentes à différents degrés, dans tous les instruments de musique. Lorsqu'il n'y en a pas, on dit

que le son est pur, il s'agit alors d'un sinusöide simple, comme dans le cas d'un diapason² ou d'un synthétiseur de son.

$$y = A \sin(2\pi f \cdot t + \phi)$$

est l'équation d'un son pur d'amplitude A et de fréquence f . Le déphasage ϕ n'est pas perçu par l'oreille; deux trompettistes déphasés ne peuvent produire un son résultant nul! Ainsi, les sinusöidales de la forme $A \sin(2\pi f \cdot t)$ sont suffisantes dans l'étude de la musique.

Lorsqu'un son est émis par un instrument de musique, toutes les harmoniques sont entendues en même temps. Comme les équations différentielles sont linéaires, la somme des solutions de la forme (4) est aussi une solution :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t).$$

Si on considère un point de la corde et compte tenu de ce qui a été dit précédemment, le mouvement de ce point sera décrit par une fonction de la forme

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(2\pi f_n \cdot t)$$

où les fréquences f_n sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale du son émis.

Dans un instrument de musique, chaque son émis est accompagné de l'ensemble de ses harmoniques; c'est ce qui constitue le timbre de l'instrument et c'est ce qui fait qu'une note donnée sonne différemment sur un violoncelle et sur une guitare, même si les registres sont presque identiques.

On pourrait définir le timbre d'un instrument comme étant le n-uplet des amplitudes des harmoniques :

$$(A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots).$$

Mais les choses ne sont pas si simples, lorsqu'un son est émis sur un instrument on doit au minimum distinguer trois phases : l'attaque du son, le plateau et l'extinction.

² Idéalement le son d'un diapason devrait être un son pur, ce qui n'est pas toujours le cas. Nous n'avons plus ce problème avec les accordeurs électroniques.

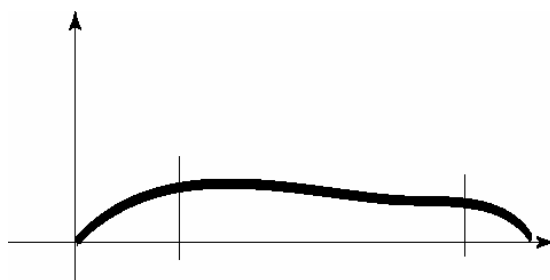


figure 7

Pour ajouter au problème, le timbre d'un instrument varie selon le registre : le grave, le moyen et l'aigu. Une flûte traversière émet dans le registre moyen un son qui est presque un son pur, mais ce n'est pas le cas dans l'aigu, et l'attaque du son dépend de chaque instrumentiste, c'est ce qui fait la différence entre un Jean-Pierre Rampal et un flûtiste amateur.

Bref, le phénomène musical ne se laisse pas facilement analyser d'un point de vue scientifique. On a beau faire des images à résonance magnétique des violons de Stradivari et avoir l'informatique à notre disposition, nous n'avons pas encore réussi à égaler la qualité de la sonorité de ses violons. Rappelons qu'Antonio Stradivari a vécu de 1644 à 1737 et qu'il n'utilisait que des outils manuels.

Bibliographie

- [1] Carl B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, New York 1968.
- [2] Sir James Jeans, *Science and Music*, Dover Publications inc., New York 1968.
- [3] N. Piskounov, *Calcul différentiel et intégral*, Éditions Mir, Moscou 1980.
- [4] S. Robert, *Calcul différentiel et intégral*, Les productions FRP, Saint-Jean-sur-Richelieu 1992.